Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

# Examen d'analyse 4

25 juin 2018, durée : 2h.

CP2, Semestre 4. Année universitaire : 2017-2018.

N.B: **il sera tenu compte de la rédaction et la clarté des réponses.** Fouzia. MORADI

***Exercice 1. : (7 points)***

*Soit la fonction* $F : ]1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{(lnt)^2}$$

1pt — 1) *Montrer que F est de classe* $C^1$ *sur* $]1, +\infty[$.

1pt — 2) *Montrer que :*

$$\forall x \in ]1, +\infty[ : \quad F'(x) = \frac{x-2}{2(lnx)^2}$$

1pt — 3) *Dresser le tableau de variations de F.*

1pt — 4) *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ .

0,5pt — 5) *a) Montrer que :* $\forall x > 1 : \quad 0 < lnx \leq x - 1$

1pt — *b) Montrer que :* $\lim_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$.

1pt — 6) *Etablir la relation :*

$$F(x) = \frac{x(2-x)}{2lnx} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{lnt}$$

0,5pt — 7) *En déduire la valeur de :*

$$\int_2^4 \frac{1}{lnt}\left(\frac{1}{lnt} - 1\right) dt$$

**<u>*Exercice 2 (7 points):*</u>**

*Soit* $(x,y)\epsilon\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ *et* $g(x,y) = \frac{sin(xy)}{x}e^{-x}$

1) **0,5pt** *a) Calculer* $\lim_{x\to0^+} g(x,y)$

   **0,5pt** *b) Montrer que :* $\forall x \geq 1$: $|g(x,y)| \leq e^{-x}$

   **0,5pt** *c) En déduire que la fonction :* $x \mapsto g(x,y)$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ .

2) **1pt** *Montrer que g est dérivable par rapport à y sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ *et calculer* $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.

3) *Soit :* $I(y) = \int_0^{+\infty} g(x,y)\,dx$

   a) **1pt** *Montrer que I est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

   b) **1pt** *Déterminer* $I'(y)$.

   c) **1pt** *Par intégration par parties, montrer que :*

   $$I'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

   d) **1pt** *En déduire que :*

   $$\forall y\epsilon\mathbb{R}: \int_0^{+\infty}\frac{sin(xy)}{x}e^{-x}dx = Arctany$$

   e) **0,5pt** *Calculer la valeur suivante :*

   $$A = \int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}e^{-x}dx$$

**<u>*Exercice 3 : (6 points)*</u>**

1) *Considérons le champ vectoriel:*

$$\vec{V}(x,y,z) = (yz^2, \quad xz^2 + z, \quad 2xyz + 2z + y)$$

a) **1pt** *Déterminer* $\overrightarrow{rot}\vec{V}$.

b) **2pt** *En déduire que* $\vec{V}$ *dérive d'un potentiel et déterminer ses potentiels.*

c) **1pt** Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'hélice H paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = cost \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 2t \end{cases} \quad avec\ t\epsilon\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

2) **2pt** Calculer le volume du domaine :

$D = \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3: \quad x^2 + y^2 \leq z^2 \ \ et \ \ 0 \leq z \leq 1\}$

**Bon Courage !!**